TENTAMEN
Reglerteknisk design
F4, IT4 & E1

Tid: Torsdag 20 december 2007, kl 14.00–19.00

Plats: Polacksbacken

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 15 och 16.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Preliminära betygsgränser: 3:[23, 33[, 4:[33, 43[, 5:[43, 50 = maxpoäng]

Uppgift 6 är istället för inlämningsuppgifterna.

<u>OBS:</u> Endast en uppgift per ark. Skriv namn på varje ark.
Sista sidan i provhäftet är ett försättsblad — fyll i det (kryssa för de uppgifter du har lämnat in lösningar för) och lämna in tillsammans med dina lösningar.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR!

Uppgift 1 Ett system har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

(a) Visa att tillståndsbeskrivningen är en *minimal realisering.* **(2p)**

(b) Bestäm överföringsfunktionen mellan u och y för systemet[1]. **(2p)**

(c) Ange systemets poler (inklusive multiplicitet). **(2p)**

(d) Har systemet några nollställen? Ange i så fall dessa. **(2p)**

Uppgift 2

(a) Betrakta systemet

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + v(t),$$

där $v(t)$ är vitt brus med intensiteten R_v. Kalmanfiltret för systemet är

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \right).$$

Bestäm Kalmanförstärkningen $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$.
Ledning: Man behöver ej lösa någon Riccatiekvation — visa det! **(4p)**

(b) Ett första ordningens system har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = ax(t) + nv(t),$$
$$y(t) = cx(t) + v(t),$$

där $v(t)$ är vitt brus med intensiteten $R_v = 1$. Man skattar x med observatören

$$\dot{\hat{x}}(t) = a\hat{x}(t) + k(y(t) - c\hat{x}(t)).$$

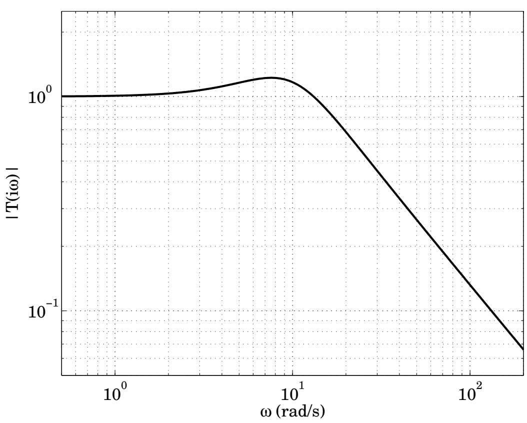
Skattningsfelet är $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Den optimala observatörsförstärkningen k, som minimerar skattningsfelets varians $\Pi_{\tilde{x}} = E\tilde{x}^2$, samt denna minimala varians, $\Pi_{\tilde{x}}$, ska bestämmas. Gör detta för de två fallen *(i)* $a - nc < 0$, samt *(ii)* $a - nc > 0$. **(5p)**

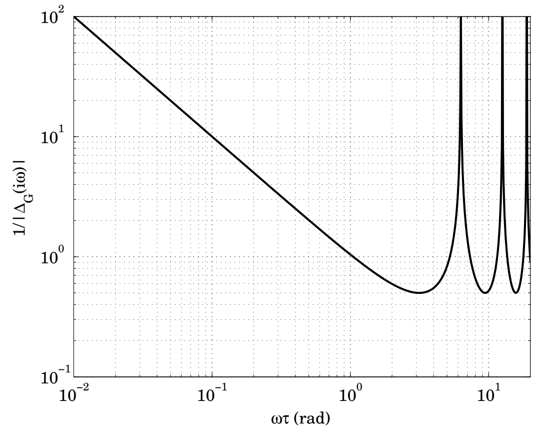
[1] För en blockdiagonal matris $D = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ gäller att $D^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$.

Uppgift 3 Ett envariabelt (SISO-) system utan poler i höger halvplan ska styras. Någon har konstruerat ett återkopplat system utifrån en nominell modell, $y(t) = G(p)u(t)$, som vi inte känner. Vi vet dock att det i systemet kan finnas en tidsfördröjning, som inte finns med i den nominella modellen. Det sanna systemet är alltså $y(t) = G(p)u(t - \tau)$, där $\tau \geq 0$ är tidsfördröjningen (som är okänd). Det sanna systemet kan uttryckas i termer av den nominella modellen enligt $G_o(s) = (1 + \Delta_G(s))G(s)$, där $\Delta_G(s)$ är det relativa modellfelet.

(a) Bestäm det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$ i detta fall. **(2p)**

(b) Det enda vi får veta om det återkopplade systemet är att för den nominella modellen (för $\tau = 0$) blir det stabilt, och den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ har beloppkurvan i den vänstra figuren nedan. I den högra figuren visas hur $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}$ beror av $\omega\tau$ (frekvensskalan är alltså här skalad med tidsfördröjningen τ).





Utifrån dessa två beloppkurvor, ange hur stor tidsfördröjningen τ kan vara utan att det slutna systemet riskerar att bli instabilt. **(4p)**

(c) En hypotes är att systemet styrs med LQ-reglering (d.v.s. tillståndsåterkoppling, $u(t) = -Lx(t) + L_r r(t)$, där vektorn L tagits fram enligt sats 9.1). Vi tror oss också veta att skärfrekvensen är $\omega_c \leq 15$ rad/s. Hur stor får tidsfördröjningen τ vara utan att äventyra det slutna systemets stabilitet under denna hypotes? Motivera!

Ledning: Vid LQ-reglering uppfylls alltid villkoret $|1 + H(i\omega)| \geq 1$, där $H(s) = L(sI - A)^{-1}B$ är kretsförstärkningen (se ekv. (9.24)). **(4p)**

Uppgift 4 Dubbeltanksystemet i reglerlabbet har (i princip) tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Systemet ska styras med styrlagen $U(s) = F_y(s)(\tilde{R}(s) - Y(s))$, och man vill att det återkopplade systemet ska uppfylla följande: *(i)* $F_y(s)$ ska ha integralverkan, *(ii)* $|S(i\omega)| < 1$ för $\omega \leq 2$ rad/s, *(iii)* $|T(i\omega)| \leq 1.25$ för alla ω, samt *(iv)* $|G_{wu}(i\omega)| \leq 5$ för alla ω ($G_{wu}(s) = F_y(s)S(s)$).

(a) Anta att man försöker uppfylla kraven med en IMC-regulator sådan att $G_c(s) = T(s) = \frac{9}{(s+3)^2}$. Bestäm $F_y(s)$, $S(s)$ och $G_{wu}(s)$ för detta fall. Är kraven *(i)* och *(iii)* uppfyllda? **(4p)**

(b) Anta istället att man försöker uppfylla kraven med $\mathcal{H}_\infty$-reglering, genom att konstruera $F_y(s)$ sådan att $||G_{ec}||_\infty \leq \gamma$, där

$$G_{ec}(s) = \begin{bmatrix} W_u(s)G_{wu}(s) & -W_T(s)T(s) & W_S(s)S(s) \end{bmatrix}^T,$$

med $W_u(s) = 0.2$, $W_T(s) = 0.8$ och $W_S(s) = \frac{2}{s}$. Ställ upp en tillståndsbeskrivning för det utvidgade öppna systemet

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_u(p) & 0 \\ W_T(p)G(p) & 0 \\ W_S(p)G(p) & W_S(p) \\ G(p) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix},$$

som ger $z(t) = G_{ec}(p)w(t)$ som slutet system när $u(t) = -F_y(p)y(t)$. Här är $G(p)$ är tanksystemets överföringsoperator och $w(t)$ är en (här fiktiv) störning. Ange också vilket värde γ bör ha för att kraven garanterat ska bli uppfyllda. **(4p)**

Uppgift 5

(a) Ett system med två insignaler och två utsignaler ska styras och man vill att skärfrekvensen ska vara ungefär 2 rad/s. För systemet gäller

$$\text{RGA}(G(0)) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ och } \text{RGA}(G(i2)) = \begin{bmatrix} 1.10 + i0.20 & -0.10 - i0.20 \\ -0.10 - i0.20 & 1.10 + i0.20 \end{bmatrix}.$$

Vilken hopparning av in- och utsignaler bör man göra om man vill använda decentraliserad reglering? Motivera! **(3p)**

(b) Systemet har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = x(t).$$

Om man väljer att styra med LQ-reglering, med $u(t) = -Lx(t) + \tilde{r}(t)$, så att $L = Q_2^{-1} B^T S$, blir lösningen S till Riccati-ekvationen en av matriserna

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix},$$

då $Q_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ange vilken av matriserna som är lösning till Riccatiekvationen, samt bestäm överföringsfunktionen från $\tilde{r}$ till y för det slutna systemet. **(4p)**

(c) Man låter $\tilde{r}(t) = L_r r(t)$ i styrlagen i (b). Bestäm L_r så att det slutna systemet (från r till y) får statisk förstärkning lika med enhetsmatrisen. **(2p)**

Uppgift 6 *Denna uppgift är istället för inlämningsuppgifterna.*

(a) Betrakta fallet när man försöker balansera en stav på fingret — se exempel 7.1 i Glad/Ljung. Om vi bara betraktar rörelser i ett lodrätt plan, och begränsar fingret till att röra sig längs en horisontell linje, är

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{l} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{l} \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

en linjäriserad modell för systemet, där $y = x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$ och insignalen u är fingrets acceleration. ϕ är stavens vinkelavvikelse från upprätt läge. I det här fallet är $l = 2g > 0$.

Fingret sitter på en robotarm som styrs av en dator. Därför behövs en samplande regulator. Bestäm den tidsdiskreta, samplade modellen för systemet då samplingsperioden är T. **(4p)**

(b) Hur stor får samplingsperioden T högst vara för att man ska kunna stabilisera systemet på ett bra sätt? Motivera! **(2p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknisk design 07-12-20

1. (a) Minimal realisering $\iff$ systemet är både styrbart och observerbart. Styrbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilken har full rang (t.ex. är kolumnerna 1, 2 och 4 linjärt oberoende). Systemet är alltså styrbart. Observerbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilken har full rang (t.ex. är de tre första raderna linjärt oberoende). Alltså är systemet även observerbart, och därmed en minimal realisering.

(b) Överföringsfunktionen är

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}.$$

(c) Eftersom det är en minimal realisering är polerna egenvärdena till A-matrisen (definition 3.4), och eftersom den är undertriangulär står egenvärdena på diagonalen. Systemet har alltså en pol i -1 och två poler i origo. (Man kan också bestämma dem utifrån $G(s)$ med hjälp av sats 3.5.)

(d) Enligt definition 3.5 är systemets nollställen de s som gör att matrisen

$$M(s) = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tappar rang. Eftersom $M(s)$ är kvadratisk sker det precis när $\det M(s) = 0$. Här blir

$$\det M(s) = s+1$$

(utveckla t.ex. först över fjärde och femte kolumnen...). Systemet har alltså ett nollställe i -1.(Går också att få från $G(s)$ och sats 3.6.)

2. **(a)** Systemet står på innovationsform om $A - NC$ är stabil. Här är

$$\det(sI - A + NC) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s + 1$$

vars nollställen är $-0.5 \pm i\sqrt{0.75}$, d.v.s. i VHP $\iff$ stabilt. Alltså är systemet på innovationsform, och då är kalmanförstärkningen $K = N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
(b) Enligt sats 5.4 är Kalmanfiltret den optimala observatören. Här är $R_1 = R_2 = R_{12} = R_v = 1$, så $k = Pc + n$ (ekv. (5.78)) där P löser

$$2aP - (Pc + n)^2 + n^2 = 0 \quad \iff \quad P\left(P - 2\frac{a - nc}{c^2}\right) = 0,$$

(ekv. (5.79)), och $P \geq 0$ och $a - kc < 0$. Dessutom blir $\Pi_{\tilde{x}} = E\tilde{x}^2 = P$ för just detta P.

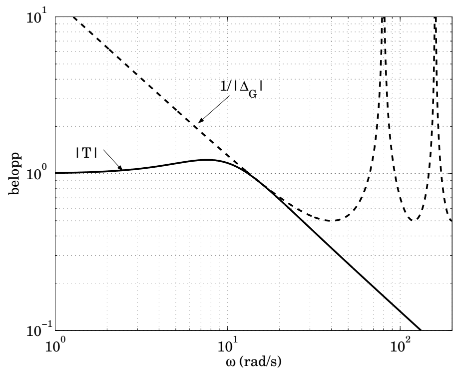
Vi får två lösningar, $P_1 = 0$ och $P_2 = 2\frac{a-nc}{c^2}$, vilka ger $k = n$ respektive $k = n + 2\frac{a-nc}{c} = 2\frac{a}{c} - n$. För fall *(i)*, då $a - nc < 0$ är bara $P_1 \geq 0$, vilket betyder att $k = n$ ($\implies a - kc = a - nc < 0$) och $\Pi_{\tilde{x}} = P_1 = 0$. För fall *(ii)*, då $a - nc > 0$ är $P_2 > 0$, vilket betyder att $k = n + 2\frac{a-nc}{c}$ ($\implies a - kc = -(a - nc) < 0$) och $\Pi_{\tilde{x}} = P_2 = 2\frac{a-nc}{c^2}$. (För P_1 blir ju $k = n \implies a - kc = a - nc > 0$!)

3. **(a)** Det sanna systemet är $G_o(s) = e^{-s\tau}G(s)$. Alltså är $\Delta_G(s) = e^{-s\tau} - 1$.

(b) Slutna systemet är garanterat stabilt ifall

$$||T\Delta_G||_\infty < 1 \quad \iff \quad |T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall\omega.$$

Beloppkurvan för T måste alltså ligga helt under beloppkurvan för $1/\Delta_G$. Gränsfallet illustreras i figuren nedan (beloppkurvan för $1/\Delta_G$ förskjuts i sidled när τ ändras).



Det är alltså på "flankerna", där lutningen är -1, som kurvorna stöter på varann. Ta en punkt på respektive flank och lös ut τ: t.ex. är $|T(i\omega_1)| = 1$

för $\omega_1 = 13$ rad/s, och $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = 1$ för $\omega\tau = 1$. Stabilitetsvillkoret ovan är alltså uppfyllt ifall

$$\omega_1\tau < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau < \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{13} \approx 0.077.$$

Tidsfördröjningen bör vara $\tau < 0.077$ sekunder.

(c) $|1 + H(i\omega)| \geq 1$, där $H(s)$ är kretsförsträkningen, betyder att fasmarginalen är minst $60° = \frac{\pi}{3}$ radianer för den nominella modellen. Den sanna kretsförstärkningen blir $H_o(s) = e^{-s\tau}H(s) \Longrightarrow$

$$|H_o(i\omega)| = |e^{-i\omega\tau}| \cdot |H(i\omega)|, \quad \arg H_o(i\omega) = -\omega\tau + \arg H(i\omega).$$

Det betyder att den sanna skärfrekvensen är samma som för den nominella modellen, och att den sanna fasmarginalen därmed är $\frac{\pi}{3} - \omega_c\tau$. För stabilitet måste fasmarginalen vara positiv $\Longrightarrow \tau < \frac{\pi}{3\omega_c}$. Detta måste gälla för alla $\omega_c \leq$ 15 rad/s $\Longrightarrow \tau < \frac{\pi}{3\cdot 15} \approx 0.070$ sekunder under hypotesen. (Hypotesen tillför alltså inget - villkoret på τ blir ju hårdare än det i (b),som ju fortfarande gäller. Detta beror på att den faktiska nominella fasmarginalen är större än 60°.)

4. (a) Vid IMC-reglering är regultatorn $F_y = (I - QG)^{-1}Q$ och det slutna systemet blir $G_c(s) = T(s) = Q(s)G(s)$. Med $Q(s) = \frac{9}{(s+3)^2}G^{-1}(s)$ får vi alltså $G_c(s) = \frac{9}{(s+3)^2}$. Tanksystemets överföringsfunktion är $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)^2}$, så

$$Q(s) = \frac{9(s+1)^2}{(s+3)^2} \implies F_y(s) = \frac{1}{1 - \frac{9}{(s+3)^2}} \cdot \frac{9(s+1)^2}{(s+3)^2} = \frac{9(s+1)^2}{s(s+6)},$$

$$S(s) = 1 - T(s) = 1 - \frac{9}{(s+3)^2} = \frac{s(s+6)}{(s+3)^2},$$

$$G_{wu}(s) = -F_y(s)S(s) = -Q(s) = -\frac{9(s+1)^2}{(s+3)^2} \text{ (fel tecken i uppg.).}$$

Kravet *(iii)* är ju uppfyllt eftersom T är vald sådan att $|T(i\omega)| \leq 1$, och $F_y(s)$ har ju integralverkan, så även krav *(i)* är uppfyllt.

(b) Till att börja med ska $\gamma = 1$ väljas för att villkoren ska uppfyllas. Från tillståndsbeskrivningen för systemet får vi att $x_2 = Gu$. Vi har då att $z_1 = W_u u = 0.2u$, $z_2 = W_T Gu = W_T x_2 = 0.8x_2$, $z_3 = W_S(Gu+w) = W_S(x_2+w) = \frac{1}{p}(2x_2 + 2w)$, samt $y = Gu + w = x_2 + w$. Inför den extra tillståndsvariabeln

$x_3 = z_3 \Longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{z}_3 = 0.5x_2 + 0.5w$. Totalt har vi då

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_2 + 2w, \\ z_1 &= 0.2u, \\ z_2 &= 0.8x_2, \\ z_3 &= x_3, \\ y &= x_2 + w \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} w, \\ z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + w. \end{cases}$$

5. (a) Eftersom alla element i RGA($G(0)$) är positiva är det inget hinder i sig att välja vilken hopparning som helst. Man bör dock välja insignal-utsignalpar efter vilka element som är närmast ett vid skärfrekvensen, vilket här betyder hopparningen $u_1 \leftrightarrow y_1$ och $u_2 \leftrightarrow y_2$.

(b) Lösningen till Riccati-ekvationen måste (allmänt) vara symmetrisk, icke-negativt definit, samt (i detta fall) en 2×2-matris. Den enda av matriserna som uppfyller detta är

$$S = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \implies L = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \implies$$

$$\tilde{G}_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 6s + 10} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi har att $Y(s) = \tilde{G}_c(s) L_r R(s)$, så vi vill ha $\tilde{G}_c(0) L_r = I \iff L_r = \tilde{G}_c^{-1}(0)$, och från (b) vet vi att

$$\tilde{G}_c^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \implies L_r = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Det samplade systemet blir

$$\begin{cases} x(kT+T) &= Fx(kT) + Gu(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT), \end{cases} \quad \text{där } F = e^{AT}, G = \int_0^T e^{At} B dt.$$

Vi har att

$$\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-1} & \frac{1}{s^2-1} \\ \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{s^2-1} \end{bmatrix}.$$

Alltså får vi

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad e^{At} B = -\frac{1}{g} \begin{bmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{bmatrix}.$$

$(\cosh t = 0.5\,(e^t + e^{-t})$ och $\sinh t = 0.5\,(e^t - e^{-t})$.) Vi får alltså

$$F = e^{AT} = \begin{bmatrix} \cosh T & \sinh T \\ \sinh T & \cosh T \end{bmatrix},$$

$$G = \int_0^T e^{At} B dt = -\frac{1}{g} \int_0^T \begin{bmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} 1 - \cosh T \\ -\sinh T \end{bmatrix}.$$

(b) Systemet har polerna ± 1. En tumregel säger att bandbredden för slutna systemet minst bör vara $2p$ där p är en pol i HHP (se sid 210 i Glad/Ljung). Alltså bör bandbredden här minst vara 2 rad/s (se exempel 7.1). Formellt måste samplingsfrekvensen vara större än dubbla bandbredden, och i praktiken betydligt större, säg tio gånger så stor. Här är det därför rimligt att ha en samplingsfrekvens på minst 20 rad/s $\Longrightarrow T \leq \frac{2\pi}{20} \approx 0.3$ sekunder.