Tentamen i Adaptiva Finita Elementmetoder Den 21 oktober 2005. Inga hjälpmedel. Totalt 50p. För G krävs 25p, för VG krävs 40p. Telefonjour/rond: Fredrik Bengzon (090-786 7140)

1. Låt rummet V_h av kontinuerliga styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av $(0, 1)$ vara givet.
(a) Definiera L^2-projektionen $P_h g \in V_h$ av en given funktion g. (1p)
(b) Definera $L^2(0, 1)$-normen och beräkna $\|x^2 + x\|_{L^2(0,\pi)}$. (2p)
(c) Formulera *och* bevisa en uppskattning av felet $g - P_h g$ i $L^2(0, 1)$-normen. Antag att intervallet $(0, 1)$ delas in i N lika långa intervall och att $g(x) = \sin(kx)$ anvïd din feluppskattning för att skatta felet i termer av N och k. Diskutera resultatet. (3p)
(d) Ange uttryck för elementen i massmatrisen samt härled formeln för dessa i termer av noderna $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$. (2p)
(e) Antag att $g \in V_h$. Visa att $P_h g = g$. (2p)

2. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ vara ett område och f en funktion definierad på Ω.
(a) Beskriv vad en triangulering av Ω är. Rita en figur. (1p)
(b) Ange vilka matriser som används för att beskriva trianguleringen i en dator. Ange också dessa matriser för den triangulering av $\Omega = (0, 1) \times (0, 3)$ med trianglar som fås genom att införa en nod i $(1/2, 1)$. (2p)
(c) Ange en formel för beräkning av $\int_\Omega f(x)\,dx$ genom approximativt genom att triangulera Ω och tillämpa hörnkvadraturformeln med tre kvadraturpunktur som ligger i triangelns hörn. Uttryck alla kvantiteter, som beror av triangeln, i termer av koordinaterna $a^i, i = 1, 2, 3$ för triangelns hörn. (3p)
(d) Dela in Ω i trianglar enligt (b)och lå $f(x, y) = xy^2$. Beräkna approximativt $\int_\Omega f(x, y)\,dxdy$ med tekniken i (b). Hur stort är felet. (2p)
(e)Antag att ekvationssystemet som bestämmer L^2-projektionen beräknas approximativt med hörnkvadratur. Visa att den approximativa L^2-projektionen som då erhålls sammanfaller med interpolanten. (2p)

3. (a) Låt $g(x, y) = \sin x \cos y$. Beräkna Δg, $D^2 g(\pi/4, \pi/4)$, samt $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$ för $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. (3p)
(b) Låt $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$. Bestäm f och g_N så att $u(x, y) = x^2 + y^3$ är en lösning till ekvationen:

$$-\nabla \cdot (1 + x)\nabla u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$
$$-n \cdot (1 + x)\nabla u = g_N \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{2}$$

där n betecknar den *utåtriktade* enhetsnormalen på randen. (2p)

4. Betrakta problemet: Finn $u = u(x, y)$ så att

$$-\nabla \cdot a\nabla u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{3}$$
$$-n \cdot a\nabla u = \gamma(u - g_D) + g_N \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{4}$$

(a) Ange en variationsformulering av problemet. (2p)
(b) Formulera en finit element-metod baserad på variationsformuleringen i (a). (1p)
(c) Beskriv hur man kan approximera randvilkoret $u = g_D$ med hjälp av (8). (2p)
(d) Härled det ekvationssystem som bestämmer finita element lösningen. (2p)
(e) Antag att $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ och att en triangulering definieras av noderna $p_1 = (0,0), p_2 = (2,0), p_3 = (2,2), p_4 = (0,2)$ och $p_5 = (1,1)$ samt att $a(x,y) = 1 + y$ och $\gamma(x,y) = 1$. Beräkna elementet a_{12} i styvhetsmatrisen. (3p)

4. Betrakta problemet: Finn $u = u(x,\, y)$ så att

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \tag{5}$$
$$-u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{6}$$

(a) Visa en a priori feluppskattning för felet $u - U$ i finit element approximationen U av den exakta lösningen u i energinormen. (2p)
(b) Formulera en a posteriori feluppskattning för problemet samt en adaptiv algoritm baserat på feluppskattningen. (3p)

6. Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) \,+\, t\,\xi(t) \,&= 2t \quad \text{för } 0 < t < T, \\ \xi(0) \,&= 1. \end{aligned}$$

(a) Lös problemet analytiskt. (2p)
(b) Formulera framåt och bakåt Euler för problemet. (2p)
(c) Låt $T = 1$ och dela in $(0,1)$ i två lika långa interval. Beräkna en approximation av $\xi(1)$ med hjälp av framåt och bakåt Euler. Hur stort är felet i metoderna? (3p)
(d) Betrakta problemet: Finn $u(x,t)$ så att

$$-\dot{u} - \Delta u = f \quad \text{i } \Omega \times [0,T], \tag{7}$$
$$-u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega \times [0,T]\ , \tag{8}$$
$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{i } \Omega. \tag{9}$$

Formulera en numerisk metod baserad på finita element approximation i rummet samt bakåt Euler i tiden. Ange också det linjära ekvationssystem som måste lösas i varje tidssteg.(3p)