UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för matematik
och matematisk statistik
Mats G. Larson
Telefon: 090-786 5502

Tentamen
Adaptiva FEM A
Datum: 2007-04-25
Skrivtid: 10:00-16:00
Betyg: G 25 p, VG 35 p

1. Låt V_h vara rummet av alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av intervallet $[0,1]$ i N stycken delintervall av längd $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

(a) Definiera L^2-projektionen $P_h g \in V_h$ av en given funktion g. (1 p)

(b) Definiera $L^2(0,1)$-normen och beräkna $\|x^2 + x\|_{L^2(0,1)}$. (2 p)

(c) Formulera *och* bevisa en uppskattning av felet $g - P_h g$ i $L^2(0,1)$-normen. Antag att intervallet $(0,1)$ delats i N lika långa delintervall och att $g(x) = \sin(kx)$. Använd din feluppskattning för att skatta felet i termer av N och k. Diskutera resultatet. (3 p)

(d) Ange uttryck för elementen i massmatrisen samt härled formler för dessa uttryckt i h_i. (2 p)

(e) Antag att $g \in V_h$. Visa att $P_h g = g$. (2 p)

2. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ vara ett område och f en funktion definierad på Ω.

(a) Beskriv vad en triangulering av Ω är. Rita en figur. (1 p)

(b) Ange vilka matriser som används för att beskriva trianguleringen i en dator. Ange också dessa matriser för den triangulering av rektangeln $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ med trianglar som fås genom att införa noder i hörnen samt i punkten $(1/2, 1)$. (2 p)

(c) Ange en approximativ formel för beräkning av $\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$ genom att triangulera Ω och tillämpa hörnkvadraturformeln med tre kvadraturpunkter som ligger i triangelns hörn. (3 p)

(d) Låt $f(x,y) = x^2 y^2$. Beräkna approximativt $\int_\Omega f(x,y)\,dxdy$ med hörnkvadratur på trianguleringen i (b). Hur stort är felet. (2 p)

(e) Antag att ekvationssystemet som bestämmer L^2-projektionen beräknas approximativt med hörnkvadratur. Visa att den approximativa L^2-projektionen som då erhålls sammanfaller med interpolanten. (2 p)

3. (a) Givet funktionen $g(x,y) = \sin x \cos y$, beräkna Δg, $D^2 g(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, samt $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$ om $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$. (3 p)

(b) Låt $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 0\}$ vara ett givet område i planet. Bestäm f och g så att $u(x,y) = x^2 + y^3$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (1+x)\nabla u &= f, \qquad \text{i } \Omega, \\
-n \cdot (1+x)\nabla u &= g, \qquad \text{på } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

där n betecknar den utåtriktade enhetsnormalen på randen $\partial\Omega$. (2 p)

4. Betrakta problemet att hitta $u = u(x,y)$ så att

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot (a\nabla u) &= f, \qquad \text{i } \Omega, &(1)\\
-n \cdot (a\nabla u) &= \gamma u, \qquad \text{på } \partial\Omega, &(2)
\end{aligned}
$$

där $a > 0$, f och γ är givna funktioner.

(a) Härled en variationsformulering till (1). (2 p)

(b) Formulera en finita elementmetod baserad på variationsformuleringen. (1 p)

(c) Beskriv hur man kan approximera randvilkoret $u = 0$ med hjälp av (2). (2 p)

(d) Härled det ekvationssystem som bestämmer finita element lösningen. (2 p)

(e) Antag att $\Omega = [0,2] \times [0,2]$ och att en triangulering definieras av noderna $N_1 = (0,0), N_2 = (2,0), N_3 = (2,2), N_4 = (0,2)$ och $N_5 = (1,1)$ samt att $a = 1 + y$ och $\gamma = 1$. Beräkna elementet a_{12} i styvhetsmatrisen. (3 p)

5. Antag att vi approximerar den exakta lösningen $u = u(x,y)$ till problemet

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \qquad \text{i } \Omega, \\
u &= 0, \qquad \text{på } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

med hjälp av en kontinuerlig styckvis linjär finita element approximation u_h.

(a) Visa en a priori feluppskattning för felet $e = u - u_h$ i energinormen. (2 p)

(b) Formulera en a posteriori feluppskattning för problemet samt redogör för hur denna kan användas i en adaptiv algoritm för att kontrollera felet e. (3 p)

6. Betrakta den ordinära differentialekvationen

$$\dot{\xi}(t) + t\xi(t) = 2t, \quad \xi(0) = 1, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

(a) Lös (3) analytiskt. (2 p)

(b) Formulera metoderna Euler bakåt och Crank-Nicolson för (3). (2 p)

(c) Låt $T = 1$ och dela in intervallet $0 < t < T$ i två lika långa delinterval. Beräkna en approximation av $\xi(1)$ med hjälp av Crank-Nicolsons metod. Hur stort är felet? (3 p)

(d) Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned} \dot{u} - \Delta u &= f, && \text{i } \Omega \times [0, T], \\ u &= 0, && \text{på } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) &= 0, && \text{i } \Omega. \end{aligned}$$

Formulera en numerisk metod baserad på finita element approximation i rummet samt Euler bakåt i tiden. Ange speciellt det linjära ekvationssystem som måste lösas i varje tidssteg. (3 p)