UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för matematik
och matematisk statistik
Mats G. Larson
Telefon: 090-786 5502

Tentamen
PDE med FEM
Datum: 2007-03-16
Skrivtid: 09:00-15:00
Betyg: G 20 p, VG 30 p

1. Låt V_h vara rummet av alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ av intervallet $I = [0, 1]$.

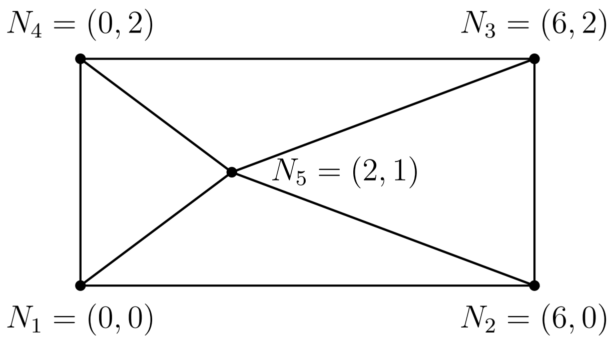
(a) Definiera $L^2(I)$-normen och beräkna $\|e^x\|_{L^2(I)}$. (2 p)

(b) Definiera L^2-projektionen $P_h f \in V_h$ av en given funktion f på I. (1 p)

(c) Formulera och bevisa en uppskattning av felet $f - P_h f$ i $L^2(I)$-normen. Antag att intervallet I är indelat i N lika långa delintervall och att $f(x) = \sin(kx)$. Använd din feluppskattning för att skatta felet i termer av N och k. Diskutera resultatet. (3 p)

(d) Ange uttryck för elementen i massmatrisen samt härled formeln för dessa i termer av noderna x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$. (2 p)

(e) Antag att $f \in V_h$. Visa att $P_h f = f$. (2 p)



Figur 1: En triangulering $\mathcal{T}_h$ av rektangeln $\Omega = [0, 6] \times [0, 2]$.

2. Betrakta trianguleringen $\mathcal{T}_h$ av rektangeln $\Omega = [0,6] \times [0,2]$ som visas i Figur 1.

(a) Beräkna de fyra trianglarnas storlekar. (2 p)

(b) Ange matriserna p och t som beskriver denna triangulering i MATLAB. (2 p)

(c) Låt V_h vara rummet av alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på $\mathcal{T}_h$. Definiera hattfunktionerna som bildar bas för V_h och ange hur funktioner i V_h kan representeras med hjälp av dessa. Ange formler för den hattfunktion som är associerad med noden N_1. (2 p)

(d) Definiera interpolaten $\pi_h g \in V_h$ till en given funktion g på Ω. (2 p)

(e) Låt $g(x,y) = x^2y^2$. Uttryck $\pi_h g$ i termer av hattfunktionerna. (2 p)

3. Inom kvantmekanik förekommer *Schrödingers* ekvation

$$\begin{aligned} \dot{u} + iu'' &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0, \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \end{aligned}$$

där lösningen $u = u_1 + iu_2$ är komplexvärd ($i = \sqrt{-1}$ är imaginärenheten).

(a) Visa att $L^2(0,1)$-normen av lösningen (d.v.s. $\int_0^1 u\bar{u}\,dx$ är tidsoberoende). *Tips:* Multiplicera ekvationen med komplexa konjugatet $\bar{u} = u_1 - iu_2$ och betrakta realdelen. (2 p)

(b) Visa att ansatsen $u(x,t) = w(x)e^{i\lambda t}$ där λ är en parameter leder till egenvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -w'' &= \lambda w, \quad 0 < x < 1, \\ w(0) = w(1) &= 0. \end{aligned}$$

Visa också att $\lambda \geq 0$. (3 p)

4. (a) Låt $g(x,y) = \sin x \cos y$. Beräkna Δg, $D^2 g(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, samt $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$ på kvadraten $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$. (3 p)

(b) Låt Ω vara cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Bestäm f och g så att $u(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ satisfierar

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad && \text{i } \Omega, \\ -n \cdot \nabla u &= g, \quad && \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}$$

där n betecknar den utåtriktade enhetsnormalen på randen $\partial\Omega$. (2 p)

5. Betrakta problemet att finna $u = u(x, y)$ så att

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + bu = f, \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$
$$-n \cdot (a\nabla u) = \gamma(u - g), \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{2}$$

där $a > 0$, $b \geq 0$, γ och g och är givna funktioner och n är utåtriktad enhetsnormal.

(a) Ange en variationsformulering av problemet. (2 p)

(b) Formulera en finit elementmetod baserad på variationsformuleringen. (1 p)

(c) Härled det ekvationssystem som bestämmer finita elementlösningen. (2 p)

(d) Beskriv hur man kan approximera randvilkoret $u = 1$ med hjälp av (2). (2 p)

(e) Antag att $\Omega = [0, 6] \times [0, 2]$ och att detta område är triangulerat med meshet i Figur 1. Beräkna elementet $A_{1,2}$ i styvhetsmatrisen då $a = 1$, $b = 0$ och $\gamma = 1$. (3 p)

6. Antag att u_h är en kontinuerlig styckvis linjär finita elementlösning till problemet

$$-u'' + u = f, \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Visa en *a priori* feluppskattning för felet $u - u_h$. (2 p)

(b) Visa en *a posteriori* feluppskattning för felet $u - u_h$. (2 p)

(c) Vad är skillnaden mellan a priori och a posteriori feluppskattningar och vad kan de användas till? (1 p)

7. (a) Utför två iterationer med Eulers implicita metod på ODE-systemet

$$\dot{c}(t) + Ac(t) = f, \quad t > 0, \quad c(0) = c_0,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Antag tidssteget $k = 1/2$. (2 p)

(b) Formulera en numerisk metod för att lösa vågekvationen

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \Delta u &= 0, \quad && \text{i } \Omega \times [0, \infty), \\ n \cdot \nabla u &= 0, && \text{på } \partial\Omega, \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \\ \dot{u}(\cdot, 0) &= v_0, \end{aligned}$$

med hjälp av finita element. (3 p)