Laplacetransformtabell

<u>Definition:</u>
För en reellvärd funktion $f(t)$, definierad för $t \geq 0$, ges Laplacetransformen av

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Det är en konvention att använda gemener[1] för tidsfunktioner, och versaler[2] för Laplacetransformer. T.ex. betecknar man Laplacetransformen av $f(t)$ med $F(s)$, d.v.s. $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. I strikt mening existerar bara Laplacetransformen för $s \in \mathbb{C}$ sådana att integralen i definitionen konvergerar. Om integralen konvergerar för $s = a \in \mathbb{C}$, så konvergerar den för alla s sådana att $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} a$. Den *inversa* Laplacetransformen ges då av

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st}F(s)ds \quad \text{för} \quad t \geq 0$$

där $\alpha \in \mathbb{R}$ och $\alpha \geq \operatorname{Re} a$.

Operationslexikon

Nr	Laplacetransform	Funktion i tidsplanet	
1	$F(s)$	$f(t)$	
2	$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	Dämpningssatsen
3	$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} f(t-a) & t-a>0 \\ 0 & t-a<0 \end{cases}$	Förskjutningssatsen
4	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	Töjning
5	$F(as)$	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$	
6	$\frac{d^nF(s)}{ds^n}$	$(-t)^n f(t)$	Derivering i s-planet
7	$\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma$	$\frac{f(t)}{t}$	Integration i s-planet
8	$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_1(\sigma)F_2(s-\sigma)d\sigma$	$f_1(t)f_2(t)$	Faltning i s-planet
9	$F_1(s)F_2(s)$	$\int_{0_-}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	Faltning i tidsplanet
10	$sF(s) - f(0_-)$	$\frac{df(t)}{dt}$	Derivering i tidsplanet
11	$s^2F(s) - \left[sf(0_-) + \frac{d}{dt}f(0_-)\right]$	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	
12	$s^nF(s) - \left[s^{n-1}f(0_-) + \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0_-)\right]$	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	
13	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau$	Integration i tidsplanet
14	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	Slutvärdesteoremet
15	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	$\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$	

[1] Små bokstäver.
[2] Stora bokstäver.

Transformlexikon

Nr	Laplacetransform	Funktion i tidsplanet	
1	$F(s)$	$f(t)$	Notation
2	1	$\delta(t)$	Diracpuls
3	$\frac{1}{s}$	1	Konstant eller stegfunktion
4	$\frac{1}{s^2}$	t	Rampfunktion
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2$	Acceleration
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n$	
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	Exponentialfunktioner
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	
9	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	
10	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$	
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	
12	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-e^{-\frac{t}{a}}$	
13	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	Hyperboliska funktioner
14	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	
15	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	Trigonometriska funktioner
16	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	
17	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin at$	Dämpade trig.funktioner
18	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos at$	

Om man vill bestämma den inversa Laplacetransformen för en rationell funktion med nämnarpolynom av gradtal högre än två kan man utnyttja att Laplacetransformen är linjär, genom att använda partialbråksuppdelning. Man kan sedan använda transformlexikonet och inverstransformera varje term för sig.

Exempel:

$$F(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2} \quad\Longleftrightarrow\quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=1-2e^{-t}+e^{-2t}$$